



भूमिती - लेख - ५

राजेंद्र गोसावी, शाळा : चिकीत्सक समूह शिरोळकर हायस्कूल, गिरगांव, मुंबई-४

वर्तुळ - कंस प्रकरण ४ थे

विद्यार्थी मित्रांनो,

S.S.C. परीक्षेत 'वर्तुळ-कंस' या प्रकरणावर विकल्पासह 16 गुणांचे प्रश्न विचारले जाणार आहेत व विचारल्या जाणाऱ्या एकूण प्रश्नांची संख्या 5 आहे, हे लक्षात ठेवा. तसेच S.S.C. परीक्षेसाठी प्रकरण 4 मधून खालील दोन महत्वाच्या प्रमेयांची सिद्धता लिहावी लागेल. त्यामुळे विद्यार्थ्यांनी या प्रमेयांच्या सिद्धता लिहिण्याचा भरपूर सराव करावा.

प्रमेय 1) चक्रीय चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.

प्रमेय 2) जर PAB ही वृत्तछेदिका दिलेल्या वर्तुळाला बिंदू A आणि B मध्ये छेदते आणि P मधून काढलेली स्पर्शिका PT ही बिंदू T मध्ये वर्तुळाला स्पर्श करते तर सिद्ध करा-

$$PA \times PB = PT^2$$

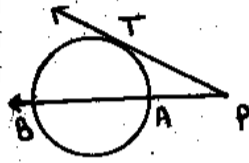
(टीप : प्रमेय 1 व 2 च्या सिद्धता पुस्तकात पान क्रमांक 93 व 104 वर दिल्या आहेत.)

इतर महत्वाची प्रमेये :

१) आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय :

आंतरलिखित कोनाचे माप हे त्याने आंतरखंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

$$m\angle BAC = \frac{1}{2} m(\text{कंस BPC})$$



२) आंतरलिखित कोनाच्या प्रमेयावर आधारित उपप्रमेये :

(i) अर्धवर्तुळातील आंतरलिखित कोन काटकोन असतो.

(ii) एकाच कंसातील आंतरलिखित कोन एकरूप असतात.

३) चक्रीय चौकोनाच्या प्रमेयाचा व्युत्पास : जर चौकोनाचे संमुख कोन परस्परांचे पूरक कोन असतील तर तो चौकोन चक्रीय असतो.

४) स्पर्शिका-छेदिका प्रमेय : जर कोनाचा शिरोबिंदू वर्तुळावर असून एक भुजा वर्तुळास स्पर्श करत असेल आणि दुसरी भुजा वर्तुळास दोन बिंदूत छेदत असेल तर त्या कोनाचे माप हे त्याने आंतरखंडित केलेल्या कंसाच्या मापाच्या निम्मे असते.

$$m\angle BAC = \frac{1}{2} m(\text{कंस AEB})$$

५) एकांतर वर्तुळखंडाचे प्रमेय :

रेषा AB ही वर्तुळाची छेदिका आहे. रेषा DC वर्तुळाला बिंदू B मध्ये स्पर्श करते. बिंदू E व बिंदू F वर्तुळाच्या एकांतर वर्तुळखंडावरील बिंदू आहेत.

$$m\angle AEB = m\angle ABC \text{ आणि}$$

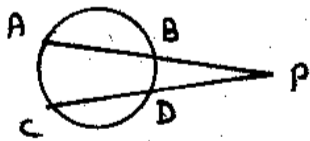
$$m\angle ABD = m\angle AFB$$

६) एका वर्तुळाच्या दोन जीवांच्या आंतरछेदनाचे प्रमेय :



$$AP \times BP = CP \times DP$$

७) एका वर्तुळाच्या दोन जीवांच्या बाह्यछेदनाचे प्रमेय :



$$AP \times BP = CP \times DP$$

सोडविलेली उदाहरणे

१) सोबतच्या आकृतीत बिंदू A, B आणि C हे केंद्र O असलेल्या वर्तुळावरील असे बिंदू आहेत की

$$m\angle AOB = 110^\circ \text{ व } m\angle AOC = 120^\circ$$

तर $m\angle BAC$ काढा.



$$\text{उत्तर : } m\angle AOB = m(\text{कंस AB})$$

$$\text{व } m\angle AOC = m(\text{कंस AC})$$

$$\therefore m(\text{कंस AB}) = 110^\circ \text{ व } m(\text{कंस AC}) = 120^\circ$$

पूर्ण वर्तुळकंसाचे माप 360° असते.

$$m(\text{कंस AB}) + m(\text{कंस AC}) + m(\text{कंस BC}) = 360^\circ$$

$$110^\circ + 120^\circ + m(\text{कंस BC}) = 360^\circ$$

$$\therefore m(\text{कंस BC}) = 130^\circ$$

$$\therefore m\angle BAC = \frac{1}{2} m(\text{कंस BC}) \quad \dots (\text{आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय})$$

$$\therefore m\angle BAC = \frac{1}{2} \times 130^\circ$$

$$\therefore m\angle BAC = 65^\circ$$

2) आकृतीत, स्पर्शिका PA वर्तुळाला बिंदू A मध्ये स्पर्श करते आणि वृत्तछेदिका PBC ही वर्तुळाला बिंदू C आणि B मध्ये छेदते.

जर $AP=15$ आणि $BP=10$ तर BC काढा.

उत्तर : स्पर्शिका-छेदिका बाह्यछेदनाच्या प्रमेयानुसार,

$$PA^2 = PB \cdot PC$$

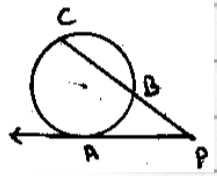
$$(15)^2 = 10 \times PC$$

$$\frac{225}{10} = PC$$

$$\therefore PC = 22.5$$

$$BC = PC - PB$$

$$BC = 22.5 - 10 = 12.5$$



3) आकृतीत O हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू आहे. रेषा AQ ही स्पर्शिका आहे. जर $OP=3$ असेल आणि जर $m(\text{कंस PM}) = 120^\circ$ असेल तर AP ठरवा.

उत्तर : अर्धवर्तुळाचे माप 180° असते.

$$m(\text{कंस PM}) + m(\text{कंस MQ}) = 180^\circ$$

$$120^\circ + m(\text{कंस MQ}) = 180^\circ$$

$$m(\text{कंस MQ}) = 60^\circ$$

$$m\angle MPQ = \frac{1}{2} m(\text{कंस MQ})$$

... (आंतरलिखित कोनाचे प्रमेय)

$$m\angle MPQ = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

म्हणजेच $m\angle APQ = 30^\circ$

$$m\angle PQA = 90^\circ$$

... (त्रिज्या-स्पर्शिका प्रमेय)

$$m\angle PAQ = 60^\circ$$

... (DPAQ चा उरलेला कोन)

ΔPAQ हा 30° - 60° - 90° मापाचा त्रिकोण आहे.

$$PQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AP$$

$$6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AP$$

$$\therefore AP = \frac{6 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

स्वाध्याय

१) पक्ष : दोन भिन्न त्रिज्याची वर्तुळे एकमेकांस बाह्यभागात T बिंदूत स्पर्श करतात. T बिंदूतून जाणारा रेषाखंड AB यांना अनुक्रमे A व B बिंदूत छेदतो. रेषा L व रेषा M या त्यांच्या स्पर्शिका वर्तुळांना अनुक्रमे A व B बिंदूत स्पर्श करतात.

साध्य : रेषा $L \parallel$ रेषा M

२) दोन एकरूप वर्तुळे परस्परांना A आणि B मध्ये छेदतात. बिंदू B मधून जाणारी वृत्तछेदिका त्या वर्तुळांना बिंदू C व D मध्ये आ रीतीने छेदते की $BC \ll BD$; तर दाखवा की, $AC = AD$

(क्रमशः)

उद्याचा विषय : विज्ञान II